Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 7 – TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nos seguintes problemas, procuram-se soluções contínuas que satisfaçam a equação diferencial em todos os pontos nos quais o termo independente é contínuo.

(1) Determine a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial

$$y'' - 3y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

onde $f(t)$ é definida pela expressão

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(2) Determine a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial

$$y'' + y' + y = f(t), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$$

onde $f(t)$ é definida pela expressão

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ 2 & \text{se } t \geq \pi. \end{cases}$$

(3) Determine a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

onde $f(t)$ é definida pela expressão

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Respostas sumárias (omitindo algumas justificações):

(1) Em termos da função de Heaviside, $f(t)$ escreve-se $f(t) = H_0(t) - H_1(t) + H_2(t) - H_3(t)$. Portanto a transformada de Laplace de $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação obtém-se

$$\begin{aligned} & (s^2 - 3s + 2)Y(s) = F(s) \\ \iff\quad & Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s-2)}\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}\right) \\ \iff\quad & Y(s) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2}\right)\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} y(t) \quad = \quad & \left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right) - H_1(t)\left(\frac{1}{2} - e^{t-1} + \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\right) \\ & + H_2(t)\left(\frac{1}{2} - e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\right) - H_3(t)\left(\frac{1}{2} - e^{t-3} + \frac{1}{2}e^{2(t-3)}\right). \end{aligned}$$

(2) Em termos da função de Heaviside, $f(t)$ escreve-se $f(t) = H_0(t) + H_\pi(t)$. Portanto aplicando a transformada de Laplace à equação obtém-se

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + sY(s) - 2 + Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s}.$$

Donde,

$$\begin{aligned} Y(s) \quad &= \quad \frac{1}{s^2+s+1}\left(2s + 3 + \frac{1}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s}\right) \\ &= \frac{2s^2+3s+1}{s(s^2+s+1)} + \frac{1}{s(s^2+s+1)}e^{-\pi s} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{s+2}{s^2+s+1} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1+s}{s^2+s+1}\right)e^{-\pi s} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right)e^{-\pi s}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução do PVI é

$$\begin{aligned} & y(t) = 1 + \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-\frac{1}{2}t} \\ & + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right)e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right)e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}\right)H_\pi(t). \end{aligned}$$

(3) Em termos da função de Heaviside,

$$f(t) = (1 - H_1(t))t^2 = t^2 - H_1(t)((t-1)^2 + 2(t-1) + 1),$$

portanto aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$\begin{aligned} & (s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) \\ \iff\quad & Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+1} - \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s-2}{s^2+1}\right)e^{-s}. \end{aligned}$$

Logo a solução é

$$y(t) = t^2 - 2 + 2\cos t - \left(t^2 - 2 + \cos(t-1) - 2\sin(t-1)\right)H_1(t).$$